

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

**Etapă locală: 21 februarie 2016**

**Clasa a X-a**

**Barem de corectare**

1. Din relația  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$  deducem  
 $a_2 = 3a_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} a_1, a_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} a_1$  și demonstrăm prin inducție matematică  
 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1$ . Atunci  $b_n = \frac{n+1}{2} a_1$  este o progresie aritmetică cu  
 rația  $\frac{1}{2} a_1$  ..... **7p**

2. a) Condiția de existență a radicalului de ordin par:  $x \geq 0$   
 Aplicăm proprietățile radicalilor și egalitatea devine  $x^{\frac{1}{120}} = x^{\frac{1}{120}}$   
 Soluția ecuației este  $x \in [0, +\infty)$  ..... **3p**
- b) Dacă  $a, b, c \in (0, +\infty) - \{1\}$  sunt în progresie geometrică, atunci are loc  
 relația  $b^2 = ac$   
 Dacă  $x \in (0, +\infty) - \{1\}$ , logaritmăm relația  $b^2 = ac$  în baza  $x$ , obținem  
 $\log_x b^2 = \log_x a + \log_x c$ , cu proprietățile logaritmilor rezultă relația  
 $\frac{2}{\log_b x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x}$  ..... **4p**

3. a) Știind că  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ,  $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3 = 1$ , atunci  
 $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1 z_2 z_3|} = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} \right| =$   
 $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}|$   
 .

Dar

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$$

. Obținem  $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 + z_2 + z_3|$ , de unde  $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ , deoarece  $|z_1 + z_2 + z_3| \neq 0$ .....**4p**

**b)** Deoarece  $z_3 \in R, |z_3| = 1$ , atunci  $z_3 = 1$

Dacă  $z_1 = a + bi, a, b \in R$ , atunci  $z_2 = a + bi, a, b \in R$ .

Din relațiile  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , avem

$$\begin{cases} 2(a^2 - b^2) + 1 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}, \text{ de unde } a = \pm \frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Se obțin numerele}$$

complexe care satisfac ipotezele.....**3p**

**4.** Logaritmăm în baza 10 relația:  $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\lg \frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\lg \frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c^2}{ba}\right)^{\lg \frac{a}{b}} = 1$

$$\text{Obținem } \lg \frac{b}{c} \lg \frac{a^2}{bc} + \lg \frac{c}{a} \lg \frac{b^2}{ac} + \lg \frac{a}{b} \lg \frac{c^2}{ba} = 0,$$

$$\lg \frac{b}{c} (\lg \frac{a}{b} + \lg \frac{a}{c}) + \lg \frac{c}{a} (\lg \frac{b}{a} + \lg \frac{b}{c}) + \lg \frac{a}{b} (\lg \frac{c}{b} + \lg \frac{c}{a}) = 0$$

$$\lg \frac{b}{c} (\lg \frac{a}{b} - \lg \frac{c}{a}) + \lg \frac{c}{a} (-\lg \frac{a}{b} + \lg \frac{b}{c}) + \lg \frac{a}{b} (-\lg \frac{b}{c} + \lg \frac{c}{a}) = 0$$

egalitate adevărată pentru  $a, b, c \in (0, +\infty)$  .....**7p**